3°/ $\begin{cases} (n+1)^{17} \equiv 2 (\text{mod } 17) & (1) \\ (n+3)^{13} \equiv 5 (\text{mod } 13) & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow$ n = 17k +1 où $k \in \mathbb{N}$

(2) s'écrit : $(17k+4)^{13} \equiv 5 (\text{mod } 13) \Leftrightarrow (3k+4)^{13} \equiv 5 (\text{mod } 13)$

or d'après le petit théorème de Fermat : $(3k+4)^{13} \equiv 3k+4 (\text{mod } 13)$ car 13 est premier

on a ainsi : $3k+4 \equiv 5 (\text{mod } 13) \Leftrightarrow 3k \equiv 1 (\text{mod } 13) \Leftrightarrow$

$4 \times 3k \equiv 4 (\text{mod } 13) \Leftrightarrow -k \equiv 4 (\text{mod } 13)$

$\Leftrightarrow k \equiv -4 (\text{mod } 13)$

d'où $k \equiv 9 (\text{mod } 13)$

$k = 13p + 9$ où $p \in \mathbb{N}$

conclusion : n = 17k + 1 où k = 13p + 9

d'où n = 17 (13 p + 9) +1

n = 221p + 154 où $p \in \mathbb{N}$

Solution 16 :

1°/ a + b = 23 ($a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$)

soit d = a $\wedge$ b donc d divise a et d divise b

d'où d divise (a + b) et par suite d divise 23

or $D_{23} = \{1,2,3\}$ et par suite d = 1 ou 23

or $\begin{cases} a \in \mathbb{N}^* \\ b \in \mathbb{N}^* \\ a+b=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 0 < a < 23 \\ 0 < b < 23 \end{matrix}$

d'où $d \neq 23$, $\begin{pmatrix} d \leq a \\ d \leq b \end{pmatrix}$

conclusion : a et b sont premiers entre eux

2°/PPCM (a,b) = 126 = m

on sait : md = ab or d = 1

d'où ab = 126